

§ 3-3 最高公因式與最低公倍式

※主題一：最高公因式與最低公倍式(已因式分解)

Ex1：若 $A = 2^5 \times 3^6 \times 7^3 \times 11^2 \times 17$ ； $B = 2^8 \times 3^4 \times 7 \times 11^4 \times 13$ ，

則 A 和 B 的最大公因數為_____；

A 和 B 的最小公倍數為_____。

Ex2：若 $f(x) = 2(x+1)^2(x-2)^3(x^2-x+1)$ ； $g(x) = 4(x+1)^3(x-2)(3x+4)$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

(1) 兩個多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的共同因式，稱為它們的公因式，

公因式中次數最高的叫做它們的最高公因式。

(2) 兩個多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的共同倍式，稱為它們的公倍式，

公倍式中次數最低的叫做它們的最低公倍式。

*最高公因式與最低公倍式均有無限多個，且任意兩個最高公因式或任意兩個最高公倍式之間只差一個非零的常數因式。

(3) $f(x)$ 與 $g(x)$ 除了常數因式外，沒有其他公因式，則稱 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互質。

Ex3：若 $f(x) = (x+2)^2(x+3)^3$ ； $g(x) = 3(x+2)^3(x+3)^2(x+4)$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

Ex4：若 $f(x) = (x-1)(x+2)$ ； $g(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

※主題二：最高公因式與最低公倍式(未因式分解)

Ex1：168 和 180 的最大公因數及最小公倍數為何？

∴168 和 180 的最大公因數為_____；

168 和 180 的最小公倍數為_____。

Ex2：若 $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ ； $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

Ex3：若 $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ； $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 3$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

Ex4：若 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ； $g(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____；

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

※主題三：輾轉相除法

Ex1：7031 與 11837 的最大公因數為_____。

Ex2：若 $f(x) = x^4 - x^2 - 4x - 4$ ； $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 8$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____。

Ex3：若 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ ； $g(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 6$ ，

則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式為_____。

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式是 $d(x)$ ，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可寫成：

$$f(x) = d(x) \times h(x),$$

$$g(x) = d(x) \times k(x),$$

其中 $h(x)$ 與 $k(x)$ 互質，因此 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式為：

$$\begin{aligned} d(x) \times h(x) \times k(x) &= \frac{[d(x) \times h(x)] \times [d(x) \times k(x)]}{d(x)} \\ &= \frac{f(x) \times g(x)}{d(x)} \end{aligned}$$

Ex4：承 Ex1，7031 與 11837 的最小公倍數為_____。

Ex5：承 Ex2， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

Ex6：承 Ex3， $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最低公倍式為_____。

※隨堂練習(輾轉相除法)

求下列題目中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式及最低公倍式：

Ex1 : $f(x) = x^4 + 7x^3 + 10x + 12$

$$g(x) = x^3 + 5x^2 - 18x - 18$$

Ex2 : $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2$

$$g(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$$

Ex3 : $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

$$g(x) = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Ex4 : $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 4$

$$g(x) = x^4 + 4x^2 + x + 6$$