

## 學習單\_排列組合

### 加法原理

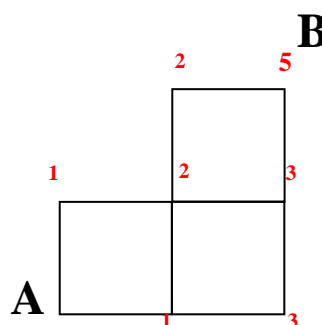
定義：完成 A 事件的方法有 m 種，完成 B 事件的方法有 n 種，當 A、B 不能同時發生，以加法連接，及完成 A 和 B 事件方法有(m+n)種。不能同時發生的事，稱互斥事件。

練習 1：從我家到林園高中，有 3 種公車可到達，也可搭計程車和校車，請問從家裡到林園高中共有幾種方式選擇？

Ans：3+1+1=5 種

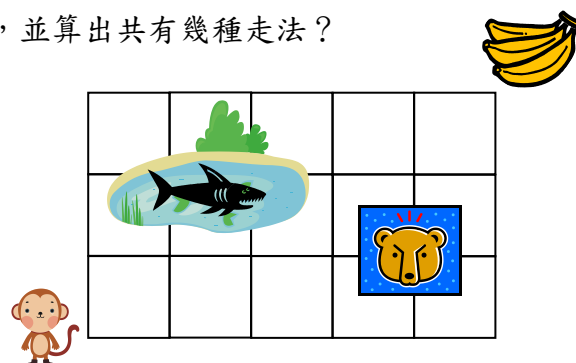
練習 2：如右圖，求點 A 到點 B 的捷徑走法共有幾種？

Ans：5 種



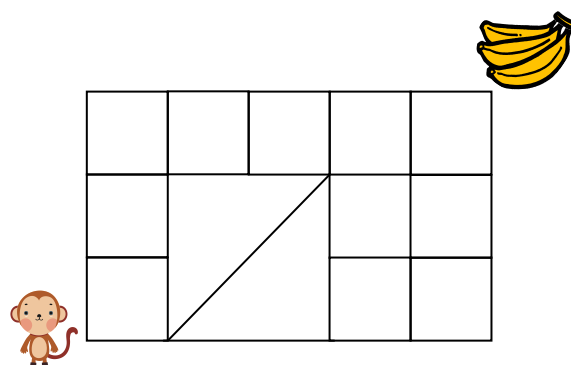
練習 3：如下圖，幫小猴子找最快回去的路，並算出共有幾種走法？

Ans：14 種



練習 4：如下圖，幫小猴子找最快回去的路，並算出共有幾種走法？

Ans：3 種



練習 5：從台北到高雄有兩種飛機和高鐵可搭乘；從高雄到澎湖有兩種船可搭乘。今齊哥從台北到澎湖(需經過高雄)，則有幾種方式可搭乘？

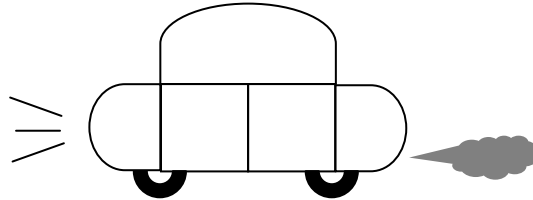
Ans：3×2=6 種

### 乘法原理

定義：完成 A 事件的方法有 m 種，完成 B 事件的方法有 n 種，當 A、B 可以同時發生，以乘法連接，及完成 A 和 B 事件方法有(mxn)種。可以同時或可以依序發生的事，互不影響，稱獨立事件。

練習 6：用五種顏色塗下圖中五個空白區域，相鄰區域不同色，試求有幾種不同塗法？

Ans：960 種



練習 7：用五種顏色塗下圖中四個空白區域，相鄰區域不同色，試求有幾種不同塗法？

Ans：260 種

A	B
C	D

### 直線排列(完全相異物)

定義：從  $n$  個不同物件中，任取  $r$  個(不可重複)排成一列，其中  $1 \leq r \leq n$ ，則方法數記為  $P_r^n$ 。

$$\text{公式： } P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

練習 8：大雄、胖虎、小夫三人排成一列，有幾種排法？

Ans： $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  種

練習 9：5 個人中選 3 人排成一列，方法數有幾種？

Ans： $5 \times 4 \times 3 = P_3^5 = 120$  種

練習 10：哆啦 A 夢、小叮鈴、大雄、靜香、胖虎、小夫、小杉等七人排成一列，依下列條件，求其排法數：

- (1) 任意排
- (2) 胖虎必排首
- (3) 胖虎不排首
- (4) 哆啦 A 夢、大雄、靜香三人完全相鄰
- (5) 哆啦 A 夢、大雄、靜香三人完全分開

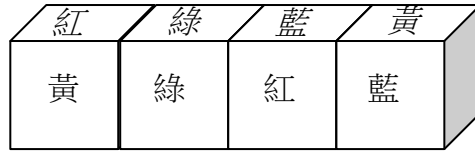
Ans：(1)5040 (2)720 (3)4320 (4)720 (5)1440

齊哥叮嚀：

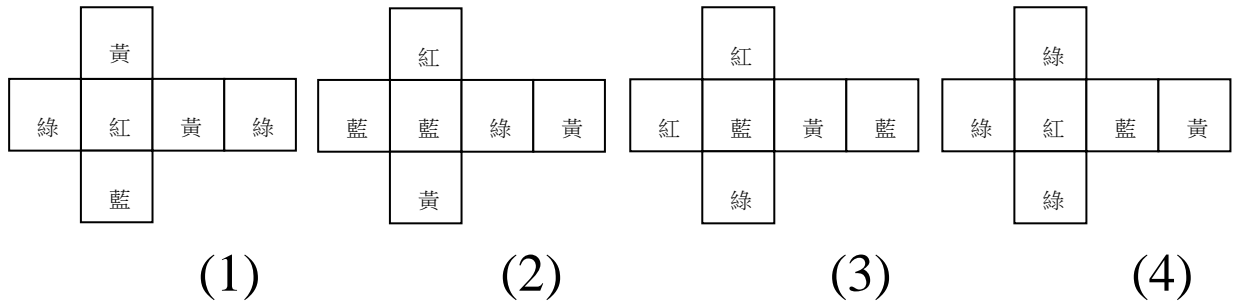
- (2) 必排  $\Rightarrow$  固定在某一位置，此物及喪失排列資格，可視為「不存在」
- (3) 必不  $\Rightarrow$  反面思考  $\Rightarrow$  (全) - (必排)
- (4) 完全相鄰  $\Rightarrow$  綁在一起算一團  $\Rightarrow$  但內部可互換排列
- (5) 完全不相鄰  $\Rightarrow$  完全分開  $\Rightarrow$  插空隙

# 組組看

積木組合：準備好手上的 4 塊積木，每面著上指定顏色(共四色)，試著組組看能否讓 4 個積木連接排成一列，並且各方向(共 4 個方向)的 4 個面分別為不同顏色，如下圖。



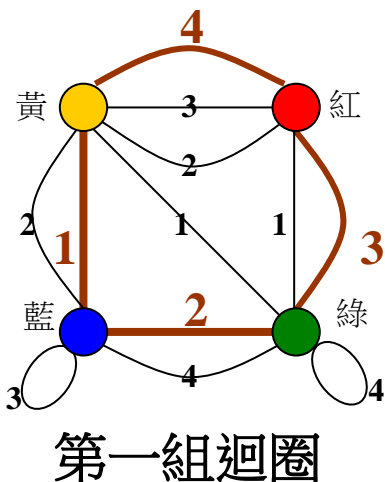
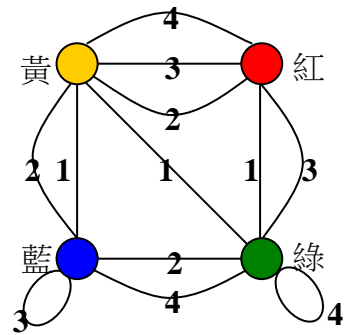
將四塊積木分別標上編號 1、2、3、4，且四塊積木的展開圖如下：



方法：將四塊積木分別找出每面之對面相對的顏色(每塊有三組相對的顏色)。

如右圖所示，每面相對的顏色用線段相連，並標上積木編號。

接著分別找出兩組迴圈，每組迴圈數字不能重複，因為數字代表的是每一塊積木都要用到。(解釋：一個迴圈可使連接 4 塊積木的同一面之顏色均不相同，並且 4 塊積木該面的對面方向之 4 面顏色也會不相同，因此只要找出兩組迴圈，即可使連接的 4 塊積木之 4 個方向的 4 個面顏色均不相同。



第一組迴圈：黃→藍→綠→紅(1→2→3→4)

將第一塊積木上方放黃色，下方放藍色

將第二塊積木上方放藍色，下方放綠色

將第三塊積木上方放綠色，下方放紅色

將第四塊積木上方放紅色，下方放黃色

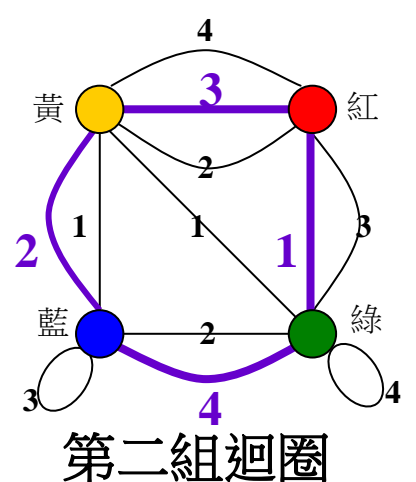
第二組迴圈：黃→藍→綠→紅(2→4→1→3)

將第二塊積木前方放黃色，後方放藍色

將第四塊積木前方放藍色，後方放綠色

將第一塊積木前方放綠色，後方放紅色

將第三塊積木前方放紅色，後方放黃色



接著神奇的事即將發生...請你(妳)將所有的積木連接合併，並任意翻轉看看，會發現...

**每面之顏色皆不一樣喔!**

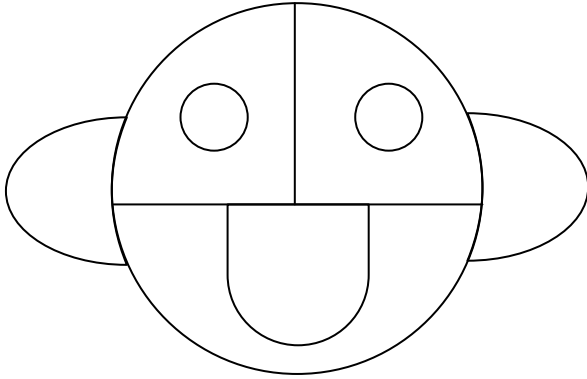
這樣的排列數有  $4!=24$  種

回家作業：設計一組三個迴圈的積木組合，使達成的機率變更大!

## 動動腦

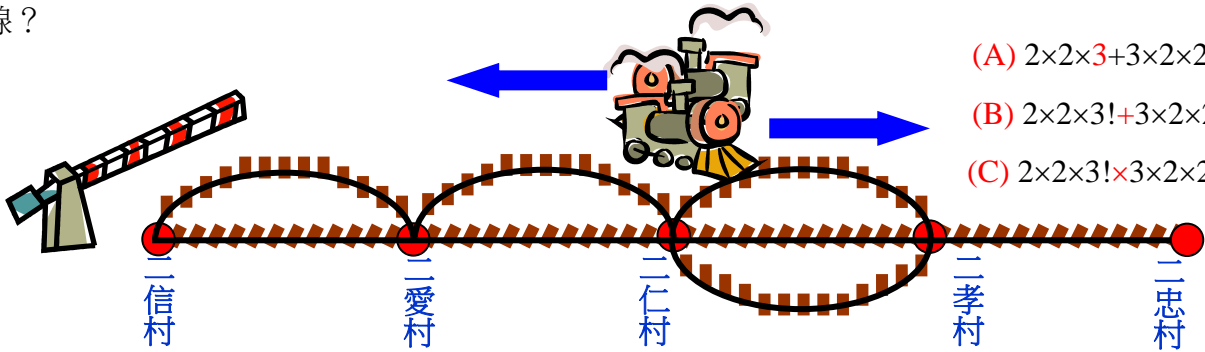
全班進行問答接力賽，全班超過一半的人答對，即可進行下一題，答對題數越多，獎品越豐富!(嘎油~)

**暖身題：**用五種顏色塗下圖中五個空白區域，相鄰區域不同色，試求有幾種不同塗法？



- (A)  $5 \times 4^3 \times 3^3 \times 2$
- (B)  $5 \times 4^2 \times 3^4 \times 2$
- (C)  $5 \times 4^3 \times 3^2 \times 2^2$

**基礎題：**二忠號列車通往 ABCDE 五個村落，共有 8 條鐵路(如圖)，今要測試全部鐵路是否暢通，若火車從二仁村出發，最後到達二忠村，經過的鐵路不再重複經過。試問有幾種不同的行經路線？



- (A)  $2 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 36$ 種
- (B)  $2 \times 2 \times 3! + 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ 種
- (C)  $2 \times 2 \times 3! \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 576$ 種

(提示：分別考慮向左行駛和向右行駛的方法數)

**進階題：**哆啦 A 夢、小叮鈴、大雄、靜香、胖虎、小夫、小杉等七人排成一列，今胖虎和小夫兩人決定要排在一起，而大雄想要和胖虎、小夫兩人完全分開，試問這樣的排法數共有幾種？



- (A)  $6! \times 2! - 5! \times 3! = 720$  種
- (B)  $6! \times 2! - 5! \times 2 = 1200$  種
- (C)  $6! \times 2! - 5! \times 2 \times 2 = 960$  種

方法一：全部情形(胖虎、小夫兩人相鄰)-(胖虎、小夫、大雄三人完全相鄰)

方法二：大雄先不排，考慮胖虎、小夫兩人相鄰和其他 4 人的排法數，最後大雄插空隙，不和胖虎、小夫排一起的空隙有 4 種，選 1 種排列

思考：哪些圖形可以一筆畫完成？

- 能一筆劃完成，且回到起點的條件：
- 能一筆畫完成，但不能回到起點的條件：
- 不能一筆畫完成的條件：

試試看：將聖誕老公公一筆畫完成!

