

一、前言

Brace 等人[1]曾指出地震是發生在斷層上之一種應力反覆升降的不穩定滑動，因此種週期性不穩定滑動，產生應力突然下降與能量釋放即所謂滯動(stick-slip)現象所造成；而滯動也是試驗室在剪裂面受剪力滑動過程中，剪應力瞬時降落繼而又上升的一種反覆升降現象。在造成滯動的原因中，針對剪裂面摩擦性質而言，一派認為滯動係因滑動面上凹凸不平的凸起物即節瘤(asperity)脆性斷裂所造成，另一派則認為是在滑動過程中，因滑動面靜、動摩擦性質改變所引起[2]，且應力升降多呈規則性上下震盪滯動，然而目前尚無一致的定論[5]。由室內節理岩體模擬結果之滯動現象發現[8,9]：斷層面引起規則性滯動現象中靜、動摩擦性質之改變，可能受剪裂面內碎屑顆粒之相互運動行為所控制，即當節理經歷相當的長位移後節瘤大多被磨損成顆粒碎屑，其間殘餘的碎屑顆粒行為將是控制剪裂面剪力強度行為的重要因子，而顆粒形狀則是影響剪力強度中膨脹效應一重要素。而實際夾層顆粒之形狀係呈多樣化，目前在顆粒力學中大多僅止於將顆粒視為圓形，甚少擴展至其他顆粒形狀之情況。因此，本文將進一步以橢圓形顆粒來模擬碎屑顆粒，以使顆粒形狀之模擬更真實，研究中將藉由大小不等之規則橢圓顆粒相對運動的幾何關係與力學關係，定性探討碎屑顆粒相互爬升滑動所引起規則性的剪力升降滯動現象。

二、砂顆粒剪力行為之相關理論模式

在土壤力學研究中常採用出砂土的剪力強度 τ 與正向應力 σ_n 成正比關係，即

$$\tau = \sigma_n \tan \phi \quad (1)$$

其中 ϕ 為砂粒間的摩擦角。一般砂土間之尖峰摩擦角效應可分為五個分量[3]：(i)顆粒間滑動摩擦角；(ii)顆粒體積膨脹效應；(iii)顆粒間重組效應；(iv)顆粒破碎效應；(v)顆粒形狀效應等。其中以砂土顆粒間的滑動摩擦角對剪力強度的貢獻是最基本的。對於顆粒之膨脹效應方面，以Newland與Allely [4]以及Rowe [6,7]等學者的研究最具成果。其它如顆粒重組效應、顆粒破碎效應，因其影響砂土剪力強度的機制相當複雜，在本文模式中亦暫不予探討。本文擬除了考慮顆粒的滑動摩擦、並依據顆粒幾何形狀考慮剪動過程中之膨脹因子及其對剪力之影響，探討於低應力下顆粒不被壓破環境中，夾層顆粒相互滑動所引起的滯動現象。

Rowe等人[6]曾依圖1兩個點接觸砂顆粒關係，推導克服摩擦力而產生相互剪動水平向之尖峰剪力(S)，可由下列三個分量組成(忽略顆粒自重)：

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= V \cdot \tan(\phi_b + \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

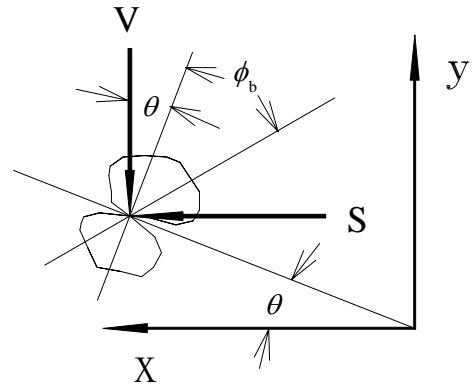


圖1. 點接觸顆粒剪力行為之能量推導模式(改繪自文獻[6])

其中： S_1 為膨脹時抵抗外力V所產生外功的剪力分量； S_2 為膨脹時由於摩擦效應所產生額外內功的剪力分量； S_3 為若試體受剪力作用不發生體積變化，由內摩擦效應作功所需的剪力分量，V為鉛直外力， ϕ_b 為兩顆粒間沿切線方向滑動不考慮膨脹效應時材料之基本摩擦角(basic friction angle)，一般可令其等於殘餘摩擦角； θ 稱為膨脹角(亦可詳後圖4標示)。又當顆粒間開始運動之瞬間，其對應的膨脹率(\dot{v})定義如下：

$$\dot{v} = \frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (3)$$

由圖1及式(2)的推導過程中，可知對於點接觸顆粒而言，該模式之剪力強度與顆粒形狀無關，只與顆粒間的基本摩擦角及顆粒膨脹角有關。式(2)祇能說明當顆粒間的膨脹角保持不變時，使顆粒間產生相對運動時所需尖峰剪力值。在顆粒錯動後，整個運動過程中隨顆粒形狀之變化膨脹角持續發生改變後，式(2)便不再適用於描述顆粒相對運動所需的剪力大小。而式(3)是表示錯動時一接觸點的膨脹率，完整膨脹行為亦無法完全於該模式中獲得。

三、橢圓顆粒相對剪動模式之建立

1. 基本假設

本文理論現階段為簡化分析，故假設(1)顆粒為橢圓形狀(包含圓形特例)；(2)顆粒間為點接觸關係；(3)顆粒在承受外加荷重時只有滑動機制，而不考慮其轉動現象(部份沿用文獻[10]之假設)；(4)不考慮顆粒之重組、破碎及變形效應；(5)忽略顆粒間其他填充物的分離阻隔情況下，則可由顆粒間的基本摩擦角 ϕ_b 及運動膨脹角 d_n (詳後式(9)之定義)推導顆粒於剪動過程中的剪力行為。

2. 單一橢圓顆粒之幾何參數

如圖 2 所示考慮一橢圓狀顆粒，假設橢圓長軸為 $2a$ ，短軸為 $2b$ ，並定義橢圓中心 O 為座標原點，則橢圓曲線上的任一點 $P(x,y)$ 必滿足橢圓方程式：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

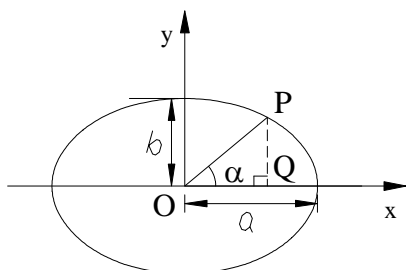


圖 2. 橢圓顆粒之幾何參數

根據式(4)可將與水平軸夾 α 角之任一接觸點 P 的幾何座標以三角函數表示為

$$P = P(a \cdot \cos \psi, b \cdot \sin \psi) \quad (5)$$

其中 ψ 稱為橢圓參數，且 $0 \leq \psi < 2\pi$ ，其值與 a 、 b 及 α 三者有關，參考圖 2 中的 $\triangle OPQ$ 可得到下列的關係：

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \tan \alpha \right) \quad (6)$$

另一方面，橢圓顆粒可以長短軸比例 a/b 的不同來觀察其形狀細扁之相異處，而最常被用來判斷橢圓形狀相異程度的方式乃是利用離心率 e 來表示：

$$e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (7)$$

其中 $0 \leq e \leq 1$ 。當橢圓離心率 e 值愈大時，表示 $a \gg b$ 顆粒形狀愈扁平；當離心率 $e=0$ 時，表示 $a=b$ 顆粒形狀為一圓形；而當離心率 $e=1$ 時，表示為一直線或平滑面。因此對於較細長扁平的顆粒，可以離心率 $e \approx 1$ 來模擬之。故本文擬利用橢圓長短軸 (a 與 b) 或離心率 (e) 之大小來模擬夾層顆粒的形狀效果。

3. 兩不同尺寸橢圓顆粒之相對幾何關係

根據上述橢圓參數之說明，可進一步地描述兩個形成點接觸橢圓顆粒之相對幾何問題（見圖 3），其中橢圓顆粒 C_1 的長軸為 $2a_1$ 、短軸為 $2b_1$ （對應的離心率為 e_1 ）；而橢圓顆粒 C_2 的長軸為 $2a_2$ 、短軸為 $2b_2$ （對應的離心率為 e_2 ）。若令橢圓顆粒 C_2 中心點座標 $C_2 = C_2(0,0)$ 為座標原點，同理可根據式(5)的三角函數參數式將顆粒 C_1 與 C_2 之任一接觸點 P 的座標表示為

$$P = P(a_2 \cdot \cos \psi, b_2 \cdot \sin \psi) \quad (8)$$

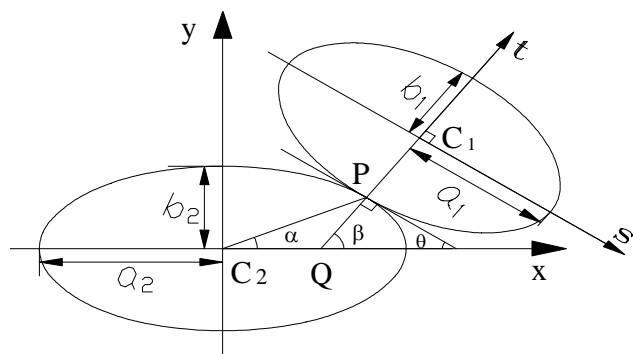


圖 3. 兩個橢圓顆粒之相對接觸幾何參數

若橢圓顆粒 C_1 相對於顆粒 C_2 祇在正 y 軸半平面作剪動爬升運動，則橢圓參數 ψ 值與橢圓 C_2 的形狀有關，並可以由式(6)知 ψ 與橢圓顆粒 C_2 長短軸的關係為

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{a_2}{b_2} \cdot \tan \alpha \right) \quad (9)$$

此處 α 定義為兩顆橢圓顆粒接觸點 P 到橢圓顆粒 C_2 中心點之連線與水平軸方向的夾角，稱為兩橢圓顆粒間相對的爬升角，用以描述 C_1 爬昇到達的位置。而橢圓顆粒 C_1 中心點座標可由圖 3 的幾何關係結合式(8)進一步得到：

$$C_1 = C_1(a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta, b_2 \cdot \sin \psi + b_1 \cdot \sin \beta) \quad (10)$$

其中 β 為顆粒 C_1 中心點及接觸點 P 之延伸連線與水平軸方向的夾角，因其與切線正交，故本文暫稱之為正交爬升角。其數值可由圖 3 中幾何關係，並沿用式(2)中 Rowe 將通過兩橢圓顆粒接觸點 P 的切線與水平軸方向的夾角定義為膨脹角 θ ，得知 β 與 θ 的關係滿足：

$$\beta + \theta = \pi / 2 \quad (11)$$

故通過接觸點 $P(a_2 \cos \psi, b_2 \sin \psi)$ 之切線斜率 (m) 可參考式(3)定義整理後導得：

$$\begin{aligned} m &= \frac{dy}{dx} - \tan \theta = -\cot \beta \\ &= \frac{d(b_2 \cdot \sin \psi)}{d(a_2 \cdot \cos \psi)} = -\frac{b_2}{a_2} \cot \psi \end{aligned} \quad (12)$$

而由式(12)可進一步得到 ψ 和 β 的關係為：

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{b_2}{a_2} \tan \beta \right) \quad (13)$$

綜合上述式(9)、式(13)及式(11)可歸納得到爬升角 α 、膨脹角 θ 、正交爬升角 β 與橢圓參數 ψ 四者間相互的關係如下：

$$\begin{cases} \psi = \tan^{-1} \left(\frac{a_2}{b_2} \cdot \tan \alpha \right) \\ \psi = \tan^{-1} \left(\frac{b_2}{a_2} \tan \beta \right) \\ \beta + \theta = \pi / 2 \end{cases} \quad (14)$$

透過式(14)可以得知：參數 α 、 θ 、 β 及 ψ 四者中若已知其中任一變數，則其餘三個未知變數皆可由式(14)之關係式求得，本文將此四個變數統稱為位置參數。故在已知兩個橢圓顆粒於任一新的爬升角 α 時，可透過式(14)由式(8)及式(10)分別得到接觸點 P 及顆粒 C_1 中心點新的移動位置。在由幾何關係建立這些主要參考點的相對位置後，即可分析橢圓顆粒 C_1 受一剪力作用後，與橢圓顆粒 C_2 所產生的持續相對爬升剪動行為。

4. 兩不同尺寸橢圓顆粒之剪動行為

遵循上節推導的定義，若橢圓顆粒 C_1 受一剪力 S 作用(見圖4)，其中心點相對於橢圓顆粒 C_2 的中心點 O 由起始爬升角 α_0 位置(圖中虛線橢圓)開始作爬升運動，並移至任意另一新的爬升角 α 的位置(其間相對假設 C_2 不動)；相對的橢圓顆粒 C_1 中心由 A 點移至 B 點(假設 O 為座標原點)，則根據式(10)可得到 C_1 中心點分別位在 A 點和 B 點時的座標為：

$$A = \begin{pmatrix} A(a_2 \cdot \cos \psi_0 + b_1 \cdot \cos \beta_0) \\ , b_2 \cdot \sin \psi_0 + b_1 \cdot \sin \beta_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$B = \begin{pmatrix} B(a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta) \\ , b_2 \cdot \sin \psi + b_1 \cdot \sin \beta \end{pmatrix} \quad (16)$$

圖4. 橢圓顆粒 C_1 相對於 C_2 之爬升運動示意圖

其中：對於已知的起始爬升角 α_0 及任一爬升角 α ，均可由式(14)關係式分別得到其他對應的 ψ_0, β_0 與 ψ, β 參數值。

再由式(15)及式(16)可計算得到 C_1 中心點相對於 C_2 中心點 O 的水平剪位移量 Δx 與垂直膨脹位移量 Δy 分別為：

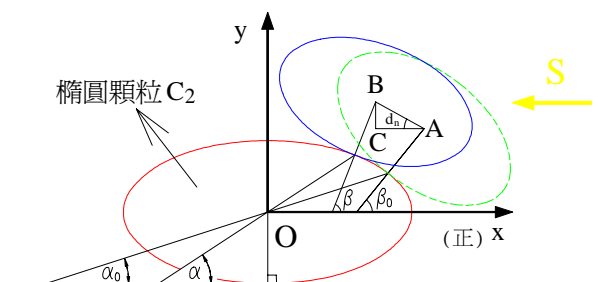
$$\begin{aligned} \Delta x &= \left| (a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta) - (a_2 \cdot \cos \psi_0 + b_1 \cdot \cos \beta_0) \right| \\ &= (a_2 \cdot \cos \psi_0 + b_1 \cdot \cos \beta_0) - (a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta y = (b_2 \cdot \sin \psi + b_1 \cdot \sin \beta) - (b_2 \cdot \sin \psi_0 + b_1 \cdot \sin \beta_0) \quad (18)$$

故當橢圓顆粒 C_1 和 C_2 因剪力作用而產生微量相對運動時，式(3)之膨脹率可改寫如下：

$$\dot{\nu} = \tan \theta \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan d_n \quad (19)$$

在式(19)中稱 d_n 為運動膨脹角($d_n = \theta$)，其意義為橢圓顆粒因剪動後，運動中持續之膨脹效應。故進一步將式(17)與(18)代入式(19)後，可以得到橢圓顆粒在剪動過程中的膨脹率為



$$\tan d_n = \frac{(b_2 \cdot \sin \psi + b_1 \cdot \sin \beta) - (b_2 \cdot \sin \psi_0 + b_1 \cdot \sin \beta_0)}{(a_2 \cdot \cos \psi_0 + b_1 \cdot \cos \beta_0) - (a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta)} \quad (20)$$

即橢圓顆粒的運動膨脹角 d_n 為：

$$d_n = \tan^{-1} \left(\frac{(b_2 \cdot \sin \psi + b_1 \cdot \sin \beta) - (b_2 \cdot \sin \psi_0 + b_1 \cdot \sin \beta_0)}{(a_2 \cdot \cos \psi_0 + b_1 \cdot \cos \beta_0) - (a_2 \cdot \cos \psi + b_1 \cdot \cos \beta)} \right) \quad (21)$$

由上式的結果並透過式(14)之位置參數相對關係可知：橢圓顆粒膨脹行為除了和起始爬升角 α_0 及爬升後相對的爬升角 α 等位置參數有關之外，亦和橢圓顆粒的形狀參數 a_1 、 b_1 、 a_2 、 b_2 有關。故當克服尖峰剪力後，顆粒間開始產生持續的相對爬升運動，在不考慮顆粒在剪動過程中所引起的破碎及重組效應與顆粒旋轉及擠壓變形條件下，於此後持續的相對爬升過程中，作用於橢圓顆粒的平均剪應力可表示如下：

$$\tau_s = \sigma_n \cdot \tan(\phi_b + d_n) \quad (22)$$

式中 σ_n 為水平剪力面上之平均正向應力。進一步若將式(21)運動膨脹角 d_n 代入式(22)，並配合式(17)之對應水平位移，則可得到兩顆形狀不等的橢圓顆粒之理論剪應力-剪位移行為；同時，亦可由式(17)與式(18)中 $\Delta x - \Delta y$ 關係得知對應的膨脹行為。

四、滯動行為之影響參數探討

1. 下部顆粒對滯動曲線之影響

在一系列顆粒重複爬升運動造成滯動之現象探討中，本文模式乃假設下排顆粒 C_2 為大小相等橢圓、緊鄰規則排列且靜止不動(相對於上排顆粒)，而由上部顆粒 C_1 相對於下排顆粒作持續爬升運動。每當上部顆粒爬過下排第一顆橢圓顆粒，而介於兩顆顆粒間時均有其對應的起始爬升角 α_0 ，因下排顆粒大小相等且規則排列，每個剪動循環中 α_0 理應相等。但當上部橢圓顆粒進入下排兩顆顆粒間，其可能滑落的方位將極為複雜而難計算其接觸位置，故本文後續的探討將上部橢圓顆粒以一等面積之相當圓形顆粒來表示，以便計算每個後續剪動循環的平均起始爬升角。

(1) 顆粒形狀之影響：

圖5(a)(b)係取簡化上部顆粒 C_1 為長短軸等於1cm之圓形顆粒，及下部顆粒 C_2 為橢圓形且其長軸等於1cm、但短軸長度(或離心率 e)並不同為例，在正向應力為0.8 MPa作用(假設尚不足以壓碎顆粒)下，所得到的規則性剪應力滯動曲線與膨脹曲線(其中基本摩擦角取 $\phi_b = 31$

度)。由圖5(a)中比較可知：下部顆粒 C_2 形狀愈扁平(如 $e_2 = 0.99$)其剪力強度愈小、剪應力下降量越小且剪力曲線之滯動現象愈平緩(圖中為顯示經歷三個顆粒的剪動滯動過程)，垂直膨脹量 Δy 亦愈小(參圖5(b)所示)，每一個剪應力滯動循環之剪位移正好等於下部顆粒 C_2 之長軸長度(1cm)。

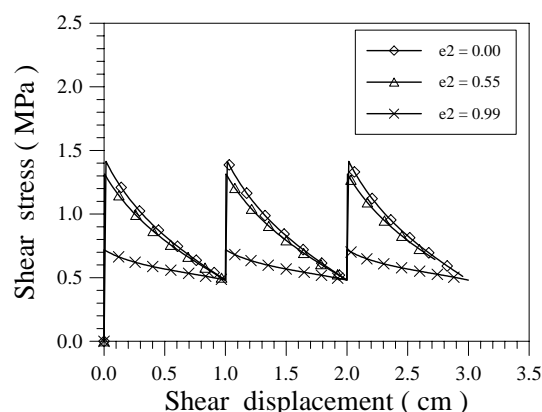


圖5(a). 離心率 e_2 與剪力滯動曲線的關係($e_1 = 1$)

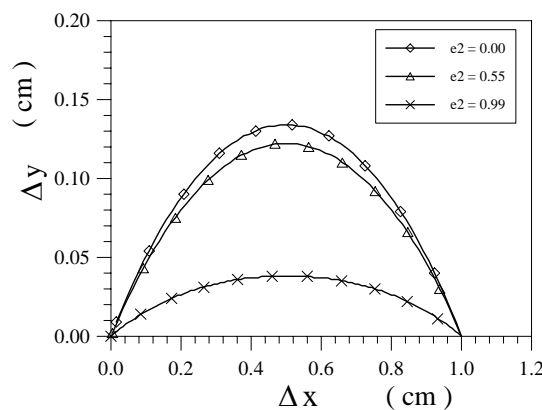


圖5(b). 離心率 e_2 與膨脹曲線的關係(僅取一循環)

(2) 顆粒大小之影響：

圖6(a)(b)則取上部圓形顆粒 C_1 長短軸仍是等於1cm、及下部顆粒 C_2 亦為圓形但長軸長度 $2a_2$ 大小不同為例，在正向應力為0.8 MPa作用下所得到的剪力滯動曲線與 $\Delta x - \Delta y$ 膨脹曲線。由圖中比較可知：下部顆粒 C_2 愈大(a_2 愈大)時，每一剪動循環之剪力強度愈高，

剪應力滯動下降量越大、剪力曲線之滯動現象愈明顯；且其水平剪位移量及垂直膨脹位移量均愈大。而綜合圖5(a)及圖6(a)可觀察得知：每一剪應力滯動循環中之剪位移量即為下部顆粒 C_2 之粒徑大小。意謂在低應力環境下，顆粒間之剪動位移量可用以反應顆粒之粒徑大小。

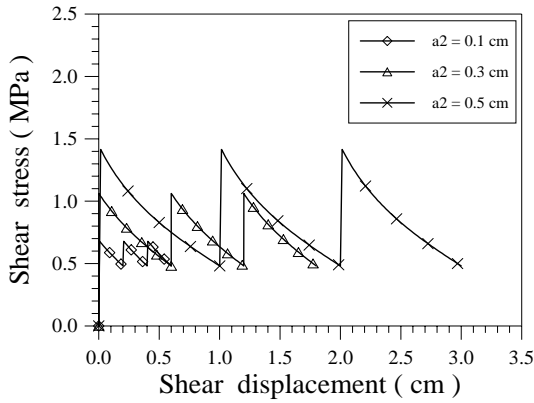


圖6(a). 長軸 a_2 與剪力滯動曲線的關係

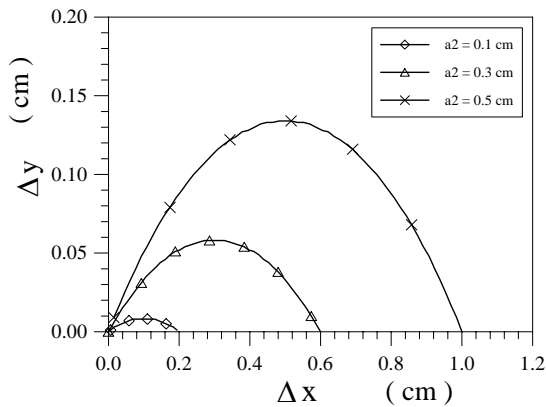


圖6(b). 長軸 a_2 與膨脹曲線的關係(僅取一循環)

2. 接觸位置對剪力強度之影響

兩橢圓顆粒之起始相對接觸位置(以平均起始爬升角 α_0 表示)，將直接影響其開始滑動時之剪力強度。經公式(22)計算可得到圖7之分析結果：若顆粒間的起始爬升角 α_0 愈高，錯動所須克服的尖峰剪應力值(τ_p)反而愈小，即兩者越容易產生相對剪動；而在相同的起始爬升角條件下，若所受正向應力(σ_n)較大，則所需尖峰剪應力值亦愈高。

3. 接觸位置對剪應力下降量之影響

由圖8所示之分析結果則可知：在相同的起始接觸爬升角 α_0 下，受正向應力(σ_n)愈大則造成的剪應力下降量 $\Delta\tau$ 愈高；而顆粒間的起始爬升角 α_0 愈高，其剪應力下降量 $\Delta\tau$ 愈小且受不同 σ_n 之影響較不明顯。顯示顆粒

間因剪動造成滯動現象中剪應力下降量，除了一般所瞭解的與 σ_n 有關外，亦與顆粒的起始相對位置有關。

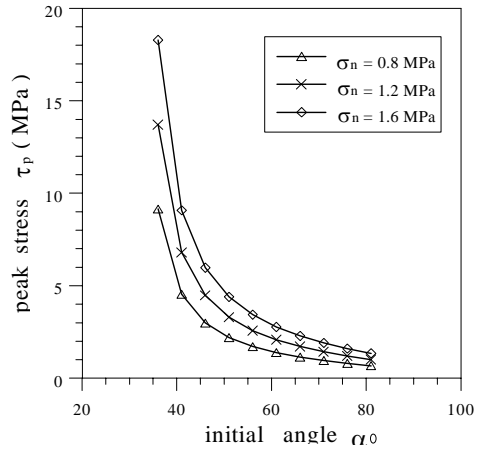


圖7. 起始爬升角 α_0 與尖峰剪力之關係

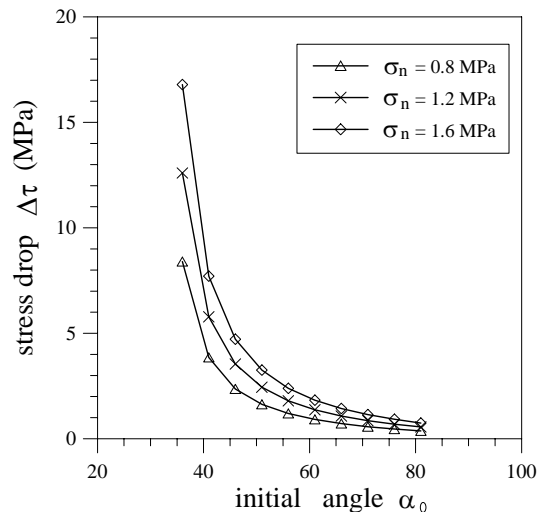


圖8. 起始爬升角 α_0 與剪應力下降量之關係

4. 顆粒相對大小對膨脹角 d_n 之影響

圖9(a)及9(b)之分析結果則為分別取 C_2 之離心率 e_2 為0(圓形顆粒)及0.9(橢圓形顆粒)時，透過式(21)之計算可探討顆粒 C_1 與 C_2 大小之差異(此處以長軸比 a_1/a_2 表示)，對運動膨脹角 d_n 效應的影響關係。其中為計算不同大小橢圓顆粒之起始接觸位置，此處仍以等面積方法將上部顆粒以一圓形替代之，故(b)例上部顆粒 C_1 實際仍為半徑 $\sqrt{a_1 b_1}$ 圓形顆粒。由圖中比較結果得知：顆粒在剪動過程中，上下排顆粒之大小差異愈大(即 a_1/a_2 比值愈大)時，膨脹效應 d_n 愈不明顯，意謂上部大顆粒相對的無法充分‘感覺’反應出下部顆粒之形狀或剪動面凹

凸程度。而綜合比較圖9(a)(b)兩者亦可得知：扁長形橢圓顆粒(如 $e_2=0.9$)之膨脹效應比圓形顆粒(如 $e_2=0$)小。

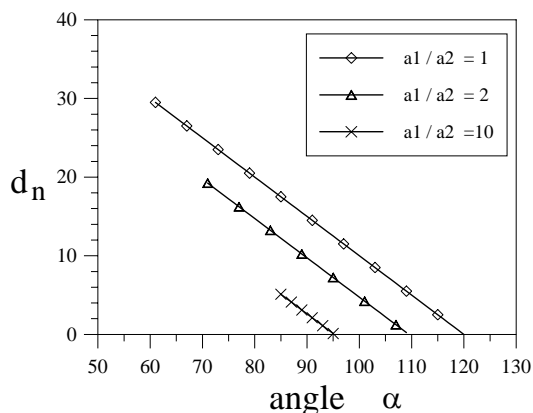


圖9(a). 下部圓形顆粒($e_2 = 0$)與 d_n 的關係

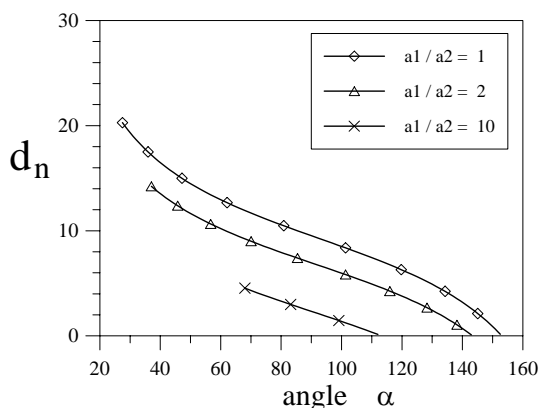


圖9(b). 下部扁平顆粒($e_2 = 0.9$)與 d_n 的關係

五、結 論

本研究以橢圓顆粒間相對滑動關係來模擬碎屑顆粒的剪力及膨脹行為，探討碎屑顆粒所引起的剪應力-剪位移滯動行為。綜合本文顆粒剪動模式分析可獲致下列幾點定性結論：

1. 在低正向應力下，本文建立之顆粒剪動模式可解釋顆粒間的相互爬升運動是造成規則性剪力滯動現象的因素之一。而剪應力下降量主要決定於剪動爬升過程中運動膨脹角的變化，且運動膨脹角與上下排顆粒形狀、相對起始位置等參數有關。
2. 下層碎屑顆粒粒徑愈大，剪應力與位移滯動曲線中之剪應力下降量愈大，其滯動現象愈明顯。但上下排顆粒長軸比值愈懸殊，運動膨脹角變化愈不明顯，且其尖峰剪力強度及剪應力下降量愈小。
3. 在較長剪位移(且正向應力不致壓碎顆粒情況)下，滯動現象可能由顆粒行為所控制，每個滯動循環的剪位移量與其所爬越之顆粒大小有關。

本文分析之定性結論係基於一些簡化的假設限制所獲得，使橢圓顆粒間相對剪動行為得以初步被瞭解，然而例如橢圓顆粒本身在錯動過程中不發生旋轉或破碎重組作用等問題，誠是後續必須進一步研究的課題。

參考文獻

1. Brace, W. F. and Byerlee, J. D., "Stick-Slip as a Mechanism for Earthquake," *Science*, Vol. 153, pp. 990-992 (1966).
2. Jaeger, J. C. and Cook, N. G. W., *Fundamentals of Rock Mechanics*, Chapman and Hall, London, pp. 61-65 (1976).
3. Lee, K. L. and Seed, H. B., "Drain Strength Characteristics of Sands," *J. Soil Mech. and Fdns. Div., ASCE*, Vol. 93, pp. 117-141 (1967).
4. Newland, P. L. and Alley, B. H. "Volume Change in Drained Triaxial Test on Granular Materials," *Geotechnique*, Vol. 7, pp. 17-34 (1957).
5. Paterson, M. S. *Experimental Rock Deformation- The Brittle Field*, Springer-Verlag, New York, pp. 99-111 (1978).
6. Rowe, P. W., Barden, I. and Lee, I. K., "Energy Components During the Triaxial Cell and Direct Shear Test," *Geotechnique*, Vol. 14, pp. 247-261 (1964).
7. Rowe, P. W. "The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact," *Proc. Royal. Soc. of London*, Vol. 269, pp. 500-527 (1962).
8. 楊長義, "斷層引致地震之一種原因探討- 滯動現象," 中國地質學會八十五年年會暨學術研討會, 台北, 第569-573頁 (1996)。
9. 楊長義、黃燦輝, "規則節理岩體單軸壓力強度之研究," 中國土木水利工程學刊, 第七卷, 第四期, 第395-408頁 (1994)。
10. 李崇正, 「砂受剪變形行為之研究」, 博士論文, 國立台灣大學土木工程研究所, 台北, 第45-47頁 (1987)。

Manuscript Received: Nov. 14, 1996

Revision Received: Apr. 10, 1997

and Accepted: June 24, 1997